

試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

Ⓝ

数 学 ②

〔『数学Ⅱ，数学B，数学C』
『旧数学Ⅱ・旧数学B』『旧数学Ⅱ』〕

(100点
70分)

I 注 意 事 項

1 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

〔新教育課程履修者〕

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
『数学Ⅱ，数学B，数学C』	3～ 38	左の科目を解答しなさい。

〔旧教育課程履修者等〕

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
『数学Ⅱ，数学B，数学C』	3～ 38	左の3科目のうちから1科目 を選択し，解答しなさい。
『旧 数 学 Ⅱ・旧 数 学 B』	39～ 73	
『旧 数 学 Ⅱ』	74～101	

2 解答用紙の記入・マークについて

- ① 解答用紙に、正しく記入・マークされていない場合は、採点できないことがあります。特に、解答用紙の解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となることがあります。
- ② 新教育課程履修者が、解答科目欄で旧教育課程の科目をマークしている場合は、0点となります。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 選択問題がある科目については、各科目の先頭ページの指示に従って選択し、その問題番号の解答欄に解答しなさい。
- 5 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

数学Ⅱ，数学B，数学C

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	必 答
第 4 問	} いずれか 3 問を選択し， 解答しなさい。
第 5 問	
第 6 問	
第 7 問	

第 1 問 (必答問題) (配点 15)

n を 3 以上の自然数とする。

(1) x^n を $x - 2$ や $2x - 1$ で割ったときの余りについて考えよう。

(i) x^n を $x - 2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを k とおく。 x^n を $Q(x)$ と k を用いて表すと

$$x^n = \boxed{\text{ア}} \cdots \cdots \text{①}$$

となる。① の両辺の x に 2 を代入すると, $k = \boxed{\text{イ}}$ であることがわかる。

(ii) (i) と同様に考えると, x^n を $2x - 1$ で割ったときの余りは, $\boxed{\text{ウ}}$ であることがわかる。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第 1 問は次ページに続く。)

ア の解答群

④ $kQ(x) + x - 2$

② $k(x - 2) + Q(x)$

④ $(x - 2)Q(x) + k$

① $kQ(x) - (x - 2)$

③ $k(x - 2) - Q(x)$

⑤ $(x - 2)Q(x) - k$

イ, ウ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

④ 0

① 1

② 2

③ -1

④ -2

⑤ 2^n

⑥ $(-1)^n$

⑦ -2^n

⑧ $\frac{1}{2^n}$

⑨ $-\frac{1}{2^n}$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(2) 次に, x^n を $(x-2)^2$ や $(2x-1)^2$ で割ったときの余りについて考えよう。

(i) x^n を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを $R(x)$ とおく。

太郎さんと花子さんは, $R(x)$ の求め方について話している。

太郎: (1) と同じように考えても, 余りをうまく求められないね。

花子: $X = x - 2$ とおいてみるのはどうだろう。

花子さんの提案する方法で, 余りを求めてみよう。

$X = x - 2$ とおく。このとき

$$x^n = (X + 2)^n$$

である。 $(X + 2)^n$ を展開すると, X の項の係数は $\boxed{\text{エ}}$, 定数項は

$\boxed{\text{オ}}$ となる。これら以外の項は X^2 で割り切れるので, $(X + 2)^n$ は, ある多項式 $A(X)$ を用いて

$$(X + 2)^n = A(X) \cdot X^2 + \boxed{\text{エ}}X + \boxed{\text{オ}}$$

と表すことができる。このことから

$$R(x) = \boxed{\text{カ}}x + \boxed{\text{キ}}$$

であることがわかる。

(ii) (i) と同様に考えると, x^n を $(2x-1)^2$ で割ったときの余りは,

$\boxed{\text{ク}}x + \boxed{\text{ケ}}$ である。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第1問は次ページに続く。)

工 ~ ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 2^n

① $\frac{1}{2^n}$

② $n \cdot 2^n$

③ $(-n + 1) \cdot 2^n$

④ $n \cdot 2^{n-1}$

⑤ $(-n + 1) \cdot 2^{n-1}$

⑥ $\frac{n}{2^n}$

⑦ $\frac{-n + 1}{2^n}$

⑧ $\frac{n}{2^{n-1}}$

⑨ $\frac{-n + 1}{2^{n-1}}$

第2問 (必答問題) (配点 15)

同一平面上にある二つの円を考える。二つの円がただ一つの共有点をもつとき、二つの円は接するという。二つの円が図1のように接するとき、二つの円は外接するといい、図2のように接するとき、二つの円は内接するという。

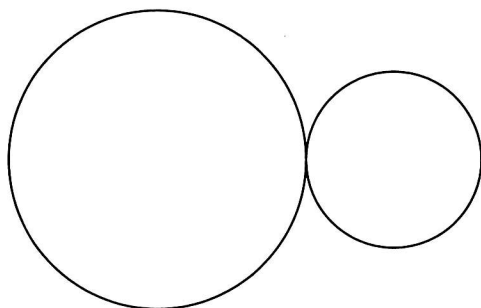


図1 外接

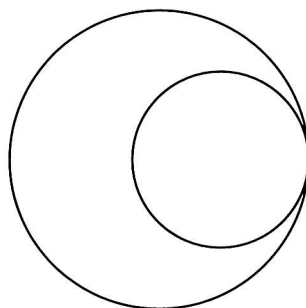


図2 内接

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

実数 s は $-2 < s < 2$ を満たし, 実数 t は $t > 0$ を満たすとする。O を原点とする座標平面において, 方程式

$$x^2 + y^2 = 4$$

が表す円を C_0 , 方程式

$$x^2 - 2sx + y^2 - 2ty + s^2 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

が表す円を C とする。

- (1) C は, 中心 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$, 半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円である。また, C は s や t の値によらず $\boxed{\text{エ}}$ と接している。

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 0	② s^2	③ t^2	④ s	⑤ $2s$
⑥ $4s$	⑦ t	⑧ $2t$	⑨ $4t$	

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

① x 軸	② y 軸
③ 直線 $y = x$	④ 直線 $y = -x$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(2) C と C_0 が接する場合を考える。 C と C_0 が接したまま実数 s が $-2 < s < 2$ の範囲を動くとき、 C の中心が描く図形について考えよう。

(i) $-2 < s < 2$ に注意すると、 C_0 と C は オ していることがわかる。いま、 C_0 の半径を r_0 、 C の半径を r とし、 C_0 の中心と C の中心との間の距離 d を r_0 と r で表すと、 $d =$ カ となる。したがって、 t を s で表すと、 $t =$ キ となる。

オ の解答群

⑦ 外 接

⑧ 内 接

カ の解答群

⑨ $r + r_0$

⑩ $r - r_0$

⑪ $r_0 - r$

⑫ $r \cdot r_0$

⑬ $\frac{r}{r_0}$

⑭ $\frac{r_0}{r}$

キ の解答群

⑮ $\frac{4 + s^2}{4}$

⑯ $\frac{4 - s^2}{4}$

⑰ $\frac{\sqrt{4 + s^2}}{2}$

⑱ $\frac{\sqrt{4 - s^2}}{2}$

⑲ $\frac{(2 + s)^2}{4}$

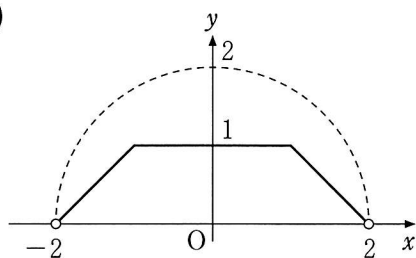
⑳ $\frac{(2 - s)^2}{4}$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第2問は次ページに続く。)

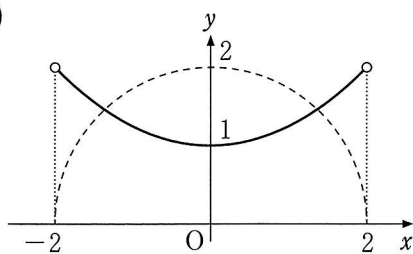
(ii) C の中心が描く図形の概形を実線で表したものは ク である。

ク については, 最も適当なものを, 次の①～⑤のうちから一つ選べ。ただし, ①～⑤では C_0 の $y > 0$ の部分をそれぞれ破線で表している。

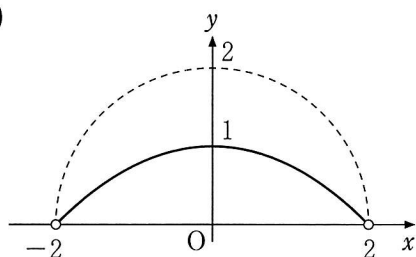
①



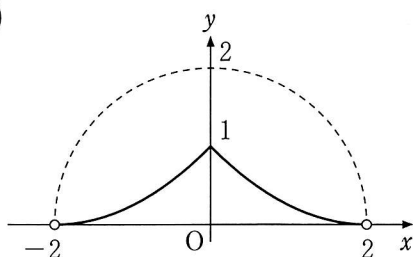
②



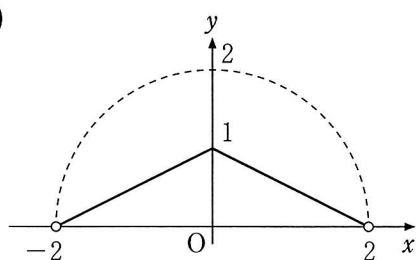
③



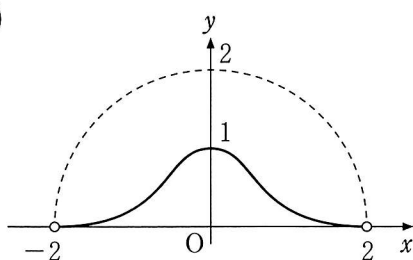
④



⑤



⑥



(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (3) 実数 k は $-2 < k < 2$ を満たすとする。① が表す円のうち、直線 $x = k$ と C_0 の両方に接する円は二つある。そのうち、中心が不等式 $x < k$ の表す領域にある円を C_1 、中心が不等式 $x > k$ の表す領域にある円を C_2 とする。

(1) と (2) の (ii) を考慮すると、 $k = \boxed{\text{ケ}}$ のとき C_1 の半径は最大値をとることがわかる。また、 $k = \boxed{\text{ケ}}$ のとき、 C_2 の中心の座標は

$$\left(\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}} - \boxed{\text{ソ}} \right)$$

である。

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(下書き用紙)

数学Ⅱ, 数学B, 数学Cの試験問題は次に続く。

第3問 (必答問題) (配点 22)

- (1) 関数 $F(x) = \int_0^x t(t-2)dt$ について考える。

$$F'(x) = x^2 - \boxed{\text{ア}}x$$

である。

$x = \boxed{\text{イ}}$ のとき, $F(x)$ は極大値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる。

$x = \boxed{\text{エ}}$ のとき, $F(x)$ は極小値 $\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

- (2) $x \geq 0$ のとき, 関数 $G(x) = \int_0^x |t(t-2)|dt$ のグラフの概形を考えよう。

- (i) $t(t-2) \leq 0$ を満たす t の値の範囲は $0 \leq t \leq 2$ であり, $t(t-2) \geq 0$ を満たす t の値の範囲は $t \leq 0, 2 \leq t$ である。よって

$$0 \leq t \leq 2 \text{ のとき} \quad |t(t-2)| = \boxed{\text{ク}}$$

$$t \leq 0, 2 \leq t \text{ のとき} \quad |t(t-2)| = \boxed{\text{ケ}}$$

である。

$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① $t(t-2)$

② $t(t+2)$

③ $-t(t-2)$

④ $-t(t+2)$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第3問は次ページに続く。)

(ii) (i)により, $G(x)$ を(1)の $F(x)$ を用いて表すと

$0 \leq x \leq 2$ のとき

$$G(x) = \int_0^x \boxed{\text{コ}} dt = \boxed{\text{サ}}$$

$2 \leq x$ のとき

$$G(x) = \int_0^2 \boxed{\text{コ}} dt + \int_2^x \boxed{\text{シ}} dt = \boxed{\text{ス}}$$

である。

$\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① $t(t-2)$

① $t(t+2)$

② $\{-t(t-2)\}$

③ $\{-t(t+2)\}$

$\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① $F(x) - \frac{8}{3}$

① $-F(x) - \frac{8}{3}$

② $F(x) + \frac{8}{3}$

③ $-F(x) + \frac{8}{3}$

④ $F(x) - \frac{4}{3}$

⑤ $-F(x) - \frac{4}{3}$

⑥ $F(x) + \frac{4}{3}$

⑦ $-F(x) + \frac{4}{3}$

⑧ $F(x)$

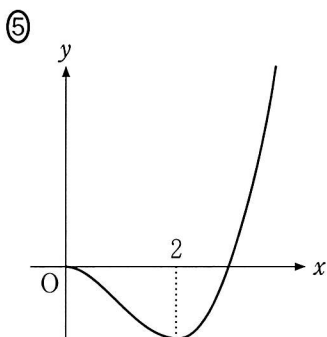
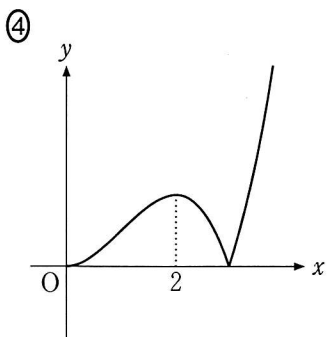
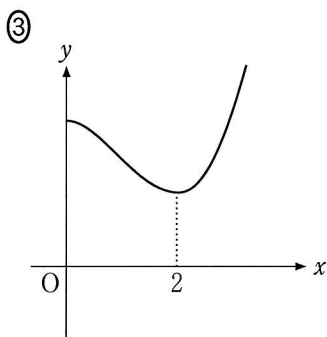
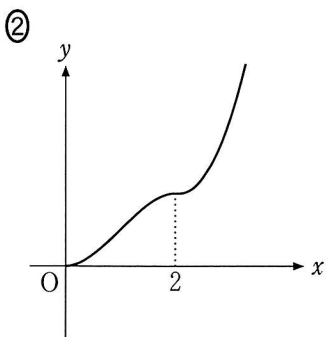
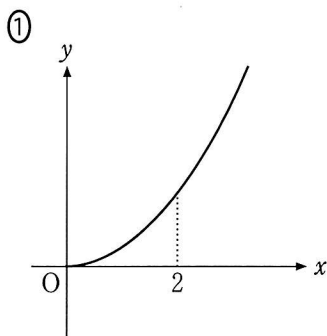
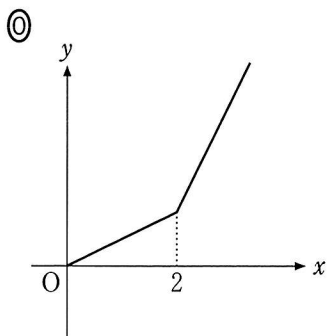
⑨ $-F(x)$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(iii) (ii) により, 関数 $y = G(x)$ のグラフの概形は セ である。

セ については, 最も適当なものを, 次の①～⑤のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第3問は次ページに続く。)

- (3) α, β は $\alpha < \beta$ を満たす定数とする。 $x \geq \alpha$ のとき, 次の関数 $H(x)$ について考える。

$$H(x) = \int_{\alpha}^x |(t - \alpha)(t - \beta)| dt - \int_{\alpha}^x (t - \alpha)(t - \beta) dt$$

$H(x)$ の値が x の値によらず一定となるような x の値の範囲は ソ である。
ソ における $H(x)$ の値は タ に等しい。

ソ の解答群

② $\alpha \leq x \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$

① $\frac{3\alpha + \beta}{4} \leq x \leq \frac{\alpha + 3\beta}{4}$

② $\frac{\alpha + \beta}{2} \leq x \leq \beta$

③ $\beta \leq x$

タ の解答群

② 0

① 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積

② 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の 2 倍

③ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の $\frac{1}{2}$ 倍

④ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の $-\frac{1}{2}$ 倍

⑤ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の -1 倍

⑥ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の -2 倍

第4問 (選択問題) (配点 16)

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定める。

$$a_1 = -3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{アイ}} \left(\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \right)^{n-1}$ である。

n が奇数であれば $a_n \boxed{\text{カ}} 0$ が成り立つ。また, n が偶数であれば $a_n \boxed{\text{キ}} 0$ が成り立つ。

$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① <	② =	③ >
-----	-----	-----

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第4問は次ページに続く。)

(2) 数列 $\{b_n\}$ を次の式で定める。

$$b_1 = -3, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n - 9 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$b_{n+1} + \boxed{\text{ク}} = -\frac{1}{2}\left(b_n + \boxed{\text{ク}}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。したがって、 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ケ}} \left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^{n-1} - \boxed{\text{ス}}$$

である。

$$\text{すべての自然数 } n \text{ について } \left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^{n-1} \leq A \text{ が成り立つような最小の実数}$$

A は、 $A = \boxed{\text{セ}}$ である。

以上のことから、数列 $\{b_n\}$ に関する記述として、次の①～③のうち、正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

- ① すべての自然数 n について $b_n < 0$ が成り立つ。
- ② すべての自然数 n について $b_n > 0$ が成り立つ。
- ③ $b_k < 0$ となる自然数 k があり、 $b_\ell > 0$ となる自然数 ℓ もある。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第4問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (3) α を実数とする。数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める。

$$c_1 = \alpha,$$

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n^2 + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

花子さんと太郎さんは、数列 $\{c_n\}$ について話している。

花子：一般項 c_n を求めてみようか。

太郎：一般項を式で表すのは難しそうだから、 α と n をいろいろ変えてみて、 c_n の具体的な値を調べてみよう。

花子：コンピュータでたくさん計算してみたけれど、 $-4 \leq c_n \leq 4$ が成り立つことが多いね。

太郎： $-4 \leq c_k \leq 4$ が成り立つと、 $-4 \leq c_{k+1} \leq 4$ も成り立つように見えるね。

- (i) 太郎さんは、次の**命題1**が真であることを証明しようと考えた。

命題1 k を自然数とする。 $-4 \leq c_k \leq 4$ が成り立つならば、
 $-4 \leq c_{k+1} \leq 4$ が成り立つ。

数列 $\{c_n\}$ は $\textcircled{1}$ を満たすので、次が成り立つ。

- すべての自然数 k について、 $c_{k+1} \leq 4$ は、タ。
- すべての自然数 k について、 $-4 \leq c_{k+1}$ は、チ。

したがって、**命題1**は真である。また、**命題1**を用いると、数学的帰納法により次の**命題2**が真であることがわかる。

命題2 $-4 \leq \alpha \leq 4$ ならば、すべての自然数 n について $-4 \leq c_n \leq 4$ が成り立つ。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第4問は次ページに続く。)

☐タ, ☐チ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① c_k の値によらず成り立つ
 ② c_k の値によらず成り立たない
 ③ $c_k \leq 4$ ならば成り立ち, $4 < c_k$ ならば成り立たない
 ④ $-4 \leq c_k$ ならば成り立ち, $c_k < -4$ ならば成り立たない
 ⑤ $-4 \leq c_k \leq 4$ ならば成り立ち, $c_k < -4$ または $4 < c_k$ ならば成り立たない

(ii) 表 1 は, コンピュータによる計算結果の一部をまとめたものである。ただし, c_4 の値は小数第 4 位を四捨五入したものである。

表 1

	c_1	c_2	c_3	c_4
$\alpha = 1$	1	3.5	- 2.125	1.742
$\alpha = 5$	5	- 8.5	- 32.125	- 512.008

α を変えて得られる数列 $\{c_n\}$ に関する次の命題 (I), (II), (III) について, 真偽の組合せとして正しいものは ☐ツ ☐である。

- (I) $\alpha > 4$ ならば, すべての自然数 n について $c_n > 4$ が成り立つ。
 (II) $\alpha \leq 4$ ならば, すべての自然数 n について $c_n \leq 4$ が成り立つ。
 (III) $\alpha < 0$ ならば, すべての自然数 n について $c_n < 0$ が成り立つ。

☐ツ の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(II)	真	真	偽	偽	真	真	偽
(III)	真	偽	真	偽	真	偽	真

第5問 (選択問題) (配点 16)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて27ページの正規分布表を用いてもよい。

次のように設定されているくじを考える。くじを1回引いて得られる点を得点と呼ぶ。

くじの設定

中身の見えない箱の中に

000, 001, 002, ..., 998, 999

の番号が、それぞれ一つずつ書かれたカードが1枚ずつ合計1000枚入っている。この箱の中から無作為に1枚のカードを取り出して番号を確認し、そのカードを箱の中に戻す試行を繰り返し行う。このとき、取り出したカードに書かれた番号によって、以下に示される点が得られるものとする。

- 番号が「777」ならば、2000点
- 番号の下二桁が「22」ならば、800点
- 番号の下一桁が「1」ならば、100点
- 上記以外ならば、0点

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第5問は次ページに続く。)

- (1) 得点を確率変数 X で表す。このとき、 X のとり得る値は $x_1 = 2000$, $x_2 = 800$, $x_3 = 100$, $x_4 = 0$ である。 X の確率分布は次の表で与えられる。

X	x_1	x_2	x_3	x_4	計
P	p_1	p_2	p_3	p_4	1

ここで

$$p_1 = P(X = 2000) = \frac{1}{1000}$$

$$p_2 = P(X = 800) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{100}$$

$$p_3 = P(X = 100) = \frac{1}{10}$$

$$p_4 = P(X = 0) = \frac{\boxed{\text{イウエ}}}{1000}$$

である。

確率変数 X の平均(期待値) $E(X)$ は

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

であるから

$$E(X) = \boxed{\text{オカ}} \dots\dots\dots \text{①}$$

となる。また、確率変数 X の分散 $V(X)$ は

$$\begin{aligned} V(X) = & \{x_1 - E(X)\}^2 p_1 + \{x_2 - E(X)\}^2 p_2 \\ & + \{x_3 - E(X)\}^2 p_3 + \{x_4 - E(X)\}^2 p_4 \end{aligned}$$

であるから

$$V(X) = 11000 \dots\dots\dots \text{②}$$

となる。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (2) くじの参加者にはあらかじめ十分な持ち点を与えられている。くじを1回引くたびに25点を引かれるとする。1回のくじ引きに対して、得点から25点を引いた差を損得点と呼ぶ。

- (i) 損得点を確率変数 Y で表す。 Y は、(1) の確率変数 X を用いて

$$Y = X - \boxed{\text{キク}}$$

と表せる。 $\boxed{\text{キク}} = c$ とおくと、 Y のとり得る値は $y_1 = x_1 - c$, $y_2 = x_2 - c$, $y_3 = x_3 - c$, $y_4 = x_4 - c$ である。 Y の確率分布は、(1) の p_1 , p_2 , p_3 , p_4 を用いて次の表で与えられる。

Y	y_1	y_2	y_3	y_4	計
P	p_1	p_2	p_3	p_4	1

確率変数 Y の平均(期待値) $E(Y)$ は、(1) の $E(X)$ を用いて

$$E(Y) = \boxed{\text{ケ}}$$

となる。また、確率変数 Y の分散 $V(Y)$ は、(1) の $V(X)$ を用いて

$$V(Y) = \boxed{\text{コ}}$$

となる。

- (ii) くじ引きを400回繰り返すとき、各回の得点を表す確率変数を X_1 , X_2 , $\dots$, X_{400} とする。また

$$Y_1 = X_1 - c, Y_2 = X_2 - c, \dots, Y_{400} = X_{400} - c$$

とすると、 Y_1 , Y_2 , $\dots$, Y_{400} は母平均 $E(Y)$, 母標準偏差 $\sqrt{V(Y)}$ の母集団から無作為に抽出した大きさ400の無作為標本とみなせる。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第5問は次ページに続く。)

標本の大きさ 400 は十分に大きいから, 標本平均

$$\bar{Y} = \frac{1}{400}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{400})$$

は近似的に正規分布 $N(E(Y), \boxed{\text{サ}})$ に従う。

このことから, くじ引きを 400 回繰り返すとき, 損得点の合計 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{400}$ が 0 以上となる確率は, ①と②から

$$P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{400} \geq 0) = \boxed{\text{シ}}$$

である。ただし, $\boxed{\text{シ}}$ の計算においては, $\sqrt{110} = 10.5$ とする。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- | | | |
|-----------|--------------------|--------------|
| ① $E(X)$ | ① $E(X) - c$ | ② $E(X) + c$ |
| ③ $cE(X)$ | ④ $\frac{E(X)}{c}$ | |

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

- | | | |
|----------------|----------------|--------------|
| ① $V(X)$ | ① $V(X) - c$ | ② $V(X) + c$ |
| ③ $V(X) - c^2$ | ④ $V(X) + c^2$ | |

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------|
| ① $\frac{\sqrt{V(Y)}}{20}$ | ① $\sqrt{V(Y)} - c$ | ② $V(Y)$ |
| ③ $V(Y) + c^2$ | ④ $V(Y) - c^2$ | ⑤ $\frac{V(Y)}{400}$ |
| ⑥ $\frac{V(Y) - c^2}{400}$ | ⑦ $\frac{V(Y) + c^2}{400}$ | |

$\boxed{\text{シ}}$ については, 最も適当なものを, 次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|--------|--------|--------|
| ① 0.17 | ① 0.33 | ② 0.47 |
| ③ 0.68 | ④ 0.82 | ⑤ 0.97 |

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第 5 問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (3) 花子さんがくじを3回引いたところ、得点の合計は1000点であった。くじを3回引いて得点の合計が1000点となる確率は ス である。また、くじを3回引いて得点の合計が1000点以上となる確率は0.0036より小さい。このことから、太郎さんは「くじの設定どおりに行われておらず、(1)で求めた X の確率分布と異なるのではないか」と疑問をもった。

くじ引きを n 回繰り返すとき、各回の得点を表す確率変数を $W_1, W_2, \dots, W_n$ とし、これらを母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から無作為に抽出した大きさ n の無作為標本とみなす。太郎さんは、 m に対する信頼度95%の信頼区間を求めることにした。

くじを400回引いた結果、得点の平均は16.75点、標本の標準偏差は75点であった。一般に、標本の大きさが大きいときには、 σ の代わりに、標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。標本の大きさ400は十分に大きいので、母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は セ である。

以上から、母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は、(1)の $E(X)$ を含んでいることが確認できた。

ス の解答群

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ⑦ 0.0001 | ⑧ 0.0003 | ⑨ 0.0005 |
| ⑩ 0.0010 | ⑪ 0.0024 | ⑫ 0.0030 |

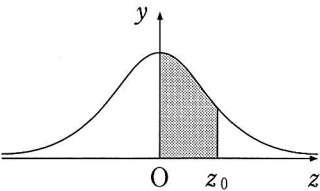
セ については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $6.46 \leq m \leq 27.04$ | ② $9.34 \leq m \leq 30.66$ |
| ③ $9.40 \leq m \leq 24.10$ | ④ $9.71 \leq m \leq 30.29$ |
| ⑤ $10.60 \leq m \leq 22.90$ | ⑥ $13.85 \leq m \leq 26.15$ |

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第5問は次ページに続く。)

正 規 分 布 表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

第6問 (選択問題) (配点 16)

Oを原点とする座標空間に, 2点 $A(0, -3, 1)$, $B(1, 0, 3)$ がある。Mを空間内の点とし, 点Mを通り, 直線OBと平行な直線を ℓ とする。直線OAと直線 ℓ が交わるかどうかを考えよう。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ とおく。

(1) 空間の2直線が交わることについて, ベクトルを用いて考えてみよう。

(i) 点Pが直線OA上にあるとき

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$$

を満たす実数 s がある。

点Qが直線 ℓ 上にあるとき, $\overrightarrow{MQ} = t\vec{b}$ を満たす実数 t があり

$$\overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{ア}}$$

となる。

したがって

$$s\vec{a} = \boxed{\text{ア}} \dots\dots\dots \text{①}$$

を満たす実数 s, t があることは, 直線OAと直線 ℓ が交わるための必要十分条件である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① $\vec{b} + t\vec{m}$	② $\vec{b} - t\vec{m}$	③ $-\vec{b} + t\vec{m}$
④ $\vec{m} + t\vec{b}$	⑤ $\vec{m} - t\vec{b}$	⑥ $-\vec{m} + t\vec{b}$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第6問は次ページに続く。)

- (ii) $\vec{m} = (2, 3, 5)$ とする。① を満たす実数 s, t があると仮定すると、次が成り立つ。

$$(0, -3s, s) = (\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}) \dots\dots\dots ②$$

② の両辺の x 成分と y 成分がそれぞれ一致するので、 $s = \boxed{\text{オカ}}$,
 $t = \boxed{\text{キク}}$ である。このとき ② の両辺の z 成分も一致する。したがって、
 直線 OA と直線 ℓ は交わり、交点の座標は、 $(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サシ}})$
 となる。

- (iii) $\vec{m} = (2, 3, -5)$ とする。① を満たす実数 s, t があると仮定すると、次が成り立つ。

$$(0, -3s, s) = (\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{ス}}) \dots\dots\dots ③$$

③ の両辺の x 成分と y 成分がそれぞれ一致するので、 $s = \boxed{\text{オカ}}$,
 $t = \boxed{\text{キク}}$ である。しかし、このとき ③ の両辺の z 成分は一致しないので、
 ③ が成り立つことに矛盾する。したがって、直線 OA と直線 ℓ は交わらない。

$\boxed{\text{イ}} \sim \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 2	④ 3	⑦ 5
③ $2 + t$	⑤ $2 - t$	⑧ $5 + 3t$
⑥ $5 - 3t$	⑦ $-5 + 3t$	⑧ $-5 - 3t$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第6問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(2) 直線 OA と直線 ℓ が交わるための $\vec{m}$ の条件について考えよう。

$\vec{e} = (0, 0, 1)$ とする。M が空間内のどのような点であっても、 $\vec{m}$ は、実数 α, β, γ を用いて

$$\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{e} \quad \dots\dots\dots ④$$

の形でただ一通りに表すことができる。

(i) $\vec{m} = (2, 3, 5)$ とする。(1) の (ii) より、 $s = \boxed{\text{オカ}}$ ， $t = \boxed{\text{キク}}$ のとき s, t は①を満たす。したがって、④を満たす実数 α, β, γ は、
 $\alpha = \boxed{\text{セソ}}$ ， $\beta = \boxed{\text{タ}}$ ， $\gamma = \boxed{\text{チ}}$ である。

(ii) $\vec{m} = (2, 3, -5)$ とする。 $\vec{m} = (2, 3, 5) - \boxed{\text{ツテ}} \vec{e}$ より、④を満たす
 実数 α, β, γ は、 $\alpha = \boxed{\text{セソ}}$ ， $\beta = \boxed{\text{タ}}$ ， $\gamma = \boxed{\text{トナニ}}$ である。

(iii) 直線 OA と直線 ℓ が交わるとき、①を満たす実数 s, t があるので、
 $\vec{m} = \boxed{\text{ヌ}} \vec{a} + \boxed{\text{ネ}} \vec{b}$ となる。したがって、 $\vec{m}$ を④の形で表すとき、
 $\gamma = 0$ である。

逆に、 $\gamma = 0$ であるとき、直線 OA と直線 ℓ が交わることが確かめられる。

以上のことから

実数 α, β を用いて $\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ と表せる

ことは、直線 OA と直線 ℓ が交わるための必要十分条件である。

$\boxed{\text{ヌ}}$ ， $\boxed{\text{ネ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① s	① $(-s)$	② t	③ $(-t)$
④ $(s+t)$	⑤ $(s-t)$	⑥ $(-s+t)$	⑦ $(-s-t)$

(数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。)

(3) $\vec{c} = (2, 3, 5)$, $\vec{d} = (2, 3, -5)$ とおく。(1)の(ii)と(iii)から, $\vec{m} = \vec{c}$ のとき, 直線 OA と直線 ℓ は交わるが, $\vec{m} = \vec{d}$ のときは, 直線 OA と直線 ℓ は交わらない。(2)を利用すると, 次のことがわかる。

(I) $\vec{m} = 13\vec{c}$ のとき, 直線 OA と直線 ℓ は 。

(II) $\vec{m} = \vec{b} + 9\vec{d}$ のとき, 直線 OA と直線 ℓ は 。

(III) $\vec{m} = 8\vec{a} - 11\vec{d}$ のとき, 直線 OA と直線 ℓ は 。

~ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 交わる

② 交わらない

第7問 (選択問題) (配点 16)

(1) 複素数平面上で方程式

$$|z - 1| + |z + 1| = 4 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす点 z 全体がどのような図形かを考える。

(i) 方程式①は ア が一定であることを表している。

ア の解答群

- ① 点 z と点 $1 - i$ の距離
- ② 点 z と点 1 の距離と、点 z と点 -1 の距離の和
- ③ 点 z と点 $1 + i$ の距離と、点 z と点 $-1 - i$ の距離の和
- ④ 点 z と点 $1 - i$ の距離の2乗
- ⑤ 点 z と点 1 の距離の2乗と、点 z と点 -1 の距離の2乗の和
- ⑥ 点 z と点 $1 + i$ の距離の2乗と、点 z と点 $-1 - i$ の距離の2乗の和

(ii) x, y を実数とし、 $z = x + yi$ とおくと、方程式①は

$$\sqrt{(x - 1)^2 + \text{イ}^2} = 4 - \sqrt{\text{ウ}^2 + y^2}$$

と変形できる。

両辺を2乗して計算すると

$$\text{エ} = 2\sqrt{\text{ウ}^2 + y^2}$$

となる。

さらに両辺を2乗して計算すると

$$\text{オ} = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

イ, ウ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

② $(x - 1)$

① x

② $(x + 1)$

③ $(y - 1)$

④ y

⑤ $(y + 1)$

エ の解答群

② $x + \frac{y}{2} + \frac{15}{4}$

① $x - \frac{y}{2} + \frac{15}{4}$

② $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{7}{2}$

③ $x + 4$

④ $-x - 4$

⑤ $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{7}{2}$

⑥ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{7}{2}$

⑦ $-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{7}{2}$

オ の解答群

② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4}$

① $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$

② $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4}$

③ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3}$

④ $\frac{1}{4}\{(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 2y^2\}$

⑤ $\frac{1}{16}\{(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 2y^2\}$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第7問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(iii) (i), (ii) から, 複素数平面上で方程式①を満たす点 z 全体は, 複素数平面上における 力 である。

ただし, 複素数平面上で方程式①を満たす点 $z = x + yi$ 全体は, 座標平面上で方程式②を満たす点 (x, y) 全体と同じ図形であることに注意する。

力 の解答群

- ① 点 $1 - i$ を中心とする半径 4 の円
- ② 点 $-1 + i$ を中心とする半径 4 の円
- ③ 2 点 $1, -1$ を焦点とし, 長軸の長さが 4 の楕円
- ④ 2 点 $i, -i$ を焦点とし, 長軸の長さが 4 の楕円
- ⑤ 2 点 $1, -1$ を焦点とし, 長軸の長さが 8 の楕円
- ⑥ 2 点 $i, -i$ を焦点とし, 長軸の長さが 8 の楕円
- ⑦ 2 点 $\sqrt{7}, -\sqrt{7}$ を焦点とし, 2 点 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ が頂点の双曲線
- ⑧ 2 点 $\sqrt{7}i, -\sqrt{7}i$ を焦点とし, 2 点 $\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$ が頂点の双曲線
- ⑨ 2 点 $\sqrt{7}, -\sqrt{7}$ を焦点とし, 2 点 $2, -2$ が頂点の双曲線
- ⑩ 2 点 $\sqrt{7}i, -\sqrt{7}i$ を焦点とし, 2 点 $2i, -2i$ が頂点の双曲線

(2) 点 z を複素数平面上における 力 上の点であるとし, 点 w は, 点 z を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点とする。このとき, 点 w が満たす方程式を求めたい。

点 w と点 z は, 関係式 キ を満たす。また, 点 z は複素数平面上で方程式①を満たす。したがって, 点 w は方程式

$$\text{ク} = 4$$

を満たす。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第7問は次ページに続く。)

キ の解答群

$$\textcircled{0} \quad z = \frac{\pi}{4} + w$$

$$\textcircled{1} \quad w = \frac{\pi}{4} + z$$

$$\textcircled{2} \quad z = \frac{\pi}{4} w$$

$$\textcircled{3} \quad w = \frac{\pi}{4} z$$

$$\textcircled{4} \quad z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} + w$$

$$\textcircled{5} \quad w = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} + z$$

$$\textcircled{6} \quad z = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) w$$

$$\textcircled{7} \quad w = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) z$$

ク の解答群

$$\textcircled{0} \quad \left| w - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right| + \left| w + \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\textcircled{1} \quad \left| w - \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \left| w + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\textcircled{2} \quad \left| w - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right| + \left| w + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right|$$

$$\textcircled{3} \quad \left| w - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right| + \left| w + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right|$$

$$\textcircled{4} \quad \left| w - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right| + \left| w + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right|$$

$$\textcircled{5} \quad \left| w - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right| + \left| w + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right|$$

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (3) 点 z を複素数平面上における 力 上の点であるとし, 点 α は, 点 z を原点を中心にな一定の角 θ だけ回転した点とする。このとき, 次の①~⑤のうち, θ を適切に定めることにより, 点 α が満たす方程式となるのは ケ である。

ケ の解答群

- ① $|\alpha - 1| + |\alpha + 1| = 6$
 ② $|\alpha - 1| + |\alpha - 3| = 4$
 ③ $\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| + \left| \alpha + \frac{1}{2} \right| = 4$
 ④ $|\alpha - (1 + \sqrt{3}i)| + |\alpha + (1 - \sqrt{3}i)| = 4$
 ⑤ $|\alpha - \sqrt{2}| + |\alpha - \sqrt{2}i| = 4$
 ⑥ $|\alpha - i| + |\alpha + i| = 4$

(下書き用紙)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(下書き用紙)