数　学　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔1〕 k を定数として，x についての不等式

$$\sqrt{5}\,x < k - x < 2x + 1 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) 不等式 $k - x < 2x + 1$ を解くと

$$x > \frac{k - \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，不等式 $\sqrt{5}\,x < k - x$ を解くと

$$x < \frac{\boxed{\text{ウエ}} + \sqrt{5}}{\boxed{\text{オ}}}k$$

である。

よって，不等式 ① を満たす x が存在するような k の値の範囲は

$$k < \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ②$$

である。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

(2) p，q は $p<q$ を満たす実数とする。x の値の範囲 $p<x<q$ に対し，$q-p$ をその範囲の幅ということにする。

②が成り立つとき，不等式①を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるような k の値の範囲は

$$k < \boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}}\sqrt{5}$$

である。

(数学Ⅰ第1問は次ページに続く。)

〔２〕

(1)　全体集合 U を

$$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

とし，U の部分集合 A，B を

$$A=\{0,3,7,9\},\quad B=\{2,3,5,7,8\}$$

とする。U の部分集合 X に対して，X の補集合を $\overline{X}$ で表す。

このとき

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{\boxed{\text{サ}},\boxed{\text{シ}},\boxed{\text{ス}}\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{サ}}<\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

U の部分集合 C を

$$C=\{1,4,5,7,8\}$$

とする。このとき，集合 C に $\overline{C}$ の要素を一つ付け加えた，あるいは，集合 C から C の要素を一つ取り除いた集合を D とする。

- $\overline{A}\cap\overline{B}\subset D$ であるとき，D は，$\boxed{\text{セ}}$ 集合である。
- $D\cap B\subset\overline{A}\cap B$ であるとき，D は，$\boxed{\text{ソ}}$ 集合である。

(数学Ｉ第１問は次ページに続く。)

$\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 集合 C に 0 を付け加えた
① 集合 C に 2 を付け加えた
② 集合 C に 3 を付け加えた
③ 集合 C に 6 を付け加えた
④ 集合 C に 9 を付け加えた
⑤ 集合 C から 1 を取り除いた
⑥ 集合 C から 4 を取り除いた
⑦ 集合 C から 5 を取り除いた
⑧ 集合 C から 7 を取り除いた
⑨ 集合 C から 8 を取り除いた

(2) x, y は $x > 0$, $y > 0$ を満たす実数とする。このとき,次のことが成り立つ。

- 「$x + y < 1$」は,「$x < 1$ かつ $y < 1$」であるための $\boxed{タ}$。
- 「$(x + y)xy < 2$」は,「$x < 1$ かつ $y < 1$」であるための $\boxed{チ}$。

$\boxed{タ}$, $\boxed{チ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 必要条件であるが,十分条件ではない
① 十分条件であるが,必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

第２問 （配点　30）

〔１〕　3 辺の長さが a，b，c である三角形が存在するための条件は，三つの不等式 $a < b + c$，$b < c + a$，$c < a + b$ が同時に成り立つことである。

このことから，3 辺の長さが $3x$，$x + 6$，$30 - 2x$ である三角形が存在するための x のとり得る値の範囲は，$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ であることがわかる。この三角形が二等辺三角形になるのは，$x = \boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ のときである。ただし，$\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$ とする。

$x = \boxed{\text{エ}}$ のとき，この二等辺三角形は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，$x = \boxed{\text{ウ}}$ のとき，この二等辺三角形は $\boxed{\text{カ}}$ であり，その外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　鋭角三角形	①　直角三角形	②　鈍角三角形

（数学Ⅰ第２問は 10 ページに続く。）

〔2〕 $\triangle$ABC において BC $= 1$ であるとする。$\sin \angle$ABC と $\sin \angle$ACB に関する条件が与えられたときの $\triangle$ABC の辺，角，面積について考察する。

(1) $\sin \angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，$\cos \angle \mathrm{ABC} = \pm \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(2) $\sin \angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin \angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ であるとする。

(i) このとき，AC $= \boxed{\text{ス}}$ AB である。

(ii) この条件を満たす三角形は二つあり，その中で面積が大きい方の $\triangle$ABC においては，$\mathrm{AB} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

（数学Ⅰ第２問は次ページに続く。）

(3) $\sin\angle ABC = 2\sin\angle ACB$ を満たす $\triangle ABC$ のうち，面積 S が最大となるものを求めよう。

$\sin\angle ABC = 2\sin\angle ACB$ と $BC = 1$ により

$$\cos\angle ABC = \frac{\boxed{タ} - \boxed{チ}AB^2}{2\,AB}$$

である。$\triangle ABC$ の面積 S について調べるために，S^2 を考える。$AB^2 = x$ とおくと

$$S^2 = -\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}x^2 + \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}x - \frac{1}{16}$$

と表すことができる。したがって，S^2 が最大となるのは $x = \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ のとき，すなわち $AB = \dfrac{\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$ のときである。$S > 0$ より，このときに面積 S も最大となる。

また，面積 S が最大となる $\triangle ABC$ において，$\angle ABC$ は $\boxed{ヒ}$ で，$\angle ACB$ は $\boxed{フ}$ である。

$\boxed{ヒ}$，$\boxed{フ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 鋭　角	① 直　角	② 鈍　角

第３問 （配点　30）

〔１〕

(1) (i) a，b を実数とする。２次不等式

$$x^2 + ax + b > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解がすべての実数となるための必要十分条件を，次の二つの方針で考えよう。

方針１

２次関数 $y = x^2 + ax + b$ の最小値に着目する。

$y = x^2 + ax + b$ の最小値は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}a^{\boxed{エ}} + b$ である。よって，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}a^{\boxed{エ}} + b \ \boxed{オ}\ 0$$

である。

方針２

２次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ に解の公式を適用したときの根号の中に着目する。

$x^2 + ax + b = 0$ に解の公式を適用すると，

$x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^{\boxed{カ}} - \boxed{キ}\,b}}{2}$ となる。よって，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$a^{\boxed{カ}} - \boxed{キ}\,b \ \boxed{ク}\ 0$$

である。

（数学Ⅰ第３問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $<$	① $=$	② $>$	③ $\leqq$	④ $\geqq$

(ii) c を実数とする。2 次不等式 $-x^2+cx-4<0$ の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$\boxed{\text{ケコ}} < c < \boxed{\text{サ}}$

である。

(2) (i) $x=1$ は 2 次不等式 $2024x^2+2023x-2022>0$ を $\boxed{\text{シ}}$。

また，$x=\dfrac{1}{2}$ はこの 2 次不等式を $\boxed{\text{ス}}$。

$\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 満たす	① 満たさない

(ii) $x=-2,\ -\dfrac{3}{2},\ -1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$ のうち，

2 次不等式 $2024x^2+2023x-2022>0$ を満たすものは $\boxed{\text{セ}}$ 個ある。

(数学Ⅰ第 3 問は次ページに続く。)

〔2〕 高校1年生の太郎さんと花子さんのクラスでは，文化祭でやきそば屋を出店することになった。二人は1皿あたりの価格をいくらにするかを検討するためにアンケート調査を行い，1皿あたりの価格と売り上げ数の関係について次の表のように予測した。

1皿あたりの価格(円)	100	150	200	250	300
売り上げ数 (皿)	1250	750	450	250	50

この結果から太郎さんと花子さんは，1皿あたりの価格が100円以上300円以下の範囲で，予測される利益(以下，利益)の最大値について考えることにした。

太郎：価格を横軸，売り上げ数を縦軸にとって散布図をかいてみたよ。

花子：散布図の点の並びは，1次関数のグラフのようには見えないね。2次関数のグラフみたいに見えるよ。

太郎：価格が100，200，300のときの点を通る2次関数のグラフをかくと，図1のように価格が150，250のときの点もそのグラフの近くにあるよ。

花子：現実には，もっと複雑な関係なのだろうけど，1次関数と2次関数で比べると，2次関数で考えた方がよいような気がするね。

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

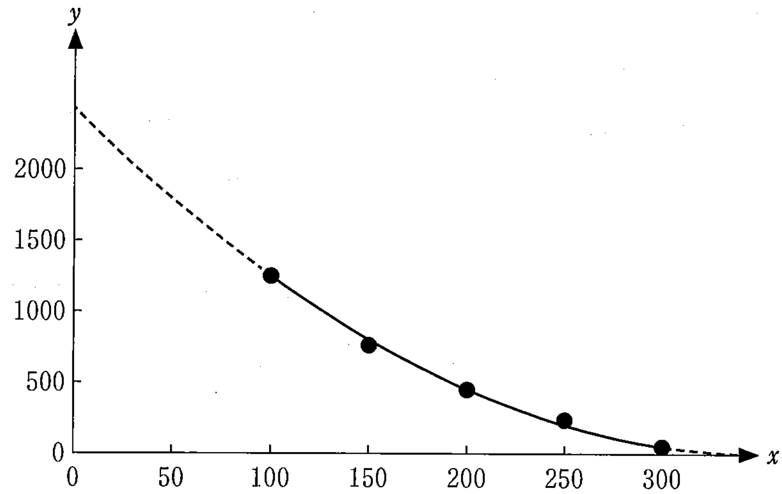

図　1

2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフは，3 点(100，1250)，(200，450)，(300，50)を通るとする。このとき，$b = \boxed{ソタチ}$ である。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

二人は，1皿あたりの価格xと売り上げ数yの関係が①を満たしたときの，$100 \leqq x \leqq 300$での利益の最大値Mについて考えることにした。

1皿あたりの材料費は80円であり，材料費以外にかかる費用は5000円である。よって，$x-80$と売り上げ数の積から，5000を引いたものが利益となる。

このとき，売り上げ数を①の右辺の2次式とすると，利益はxの $\boxed{\text{ツ}}$ 次式となる。一方で，売り上げ数として①の右辺の代わりにxの $\boxed{\text{テ}}$ 次式を使えば，利益はxの2次式となる。

太郎：利益が $\boxed{\text{ツ}}$ 次式だと，今の私たちの知識では最大値Mを正確に求めることができないね。

花子：①の右辺の代わりに $\boxed{\text{テ}}$ 次式を使えば利益は2次式になるから，最大値を求められるよ。

太郎：現実の問題を考えるときには正確な答えが出せないことも多いから，自分の知識の範囲内で工夫しておおよその値を出すことには価値があると思うよ。

花子：考えているのが利益だから，①の右辺の代わりの式は売り上げ数を少なく見積もった式を考えると手堅いね。

太郎：少なく見積もるということは，その関数のグラフは①のグラフより，下の方にあるということだね。

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

1 次関数

$$y = -4x + 1160 \qquad \cdots\cdots ②$$

を考える。このとき，① と ② のグラフの位置関係は次の図 2 のようになっている。

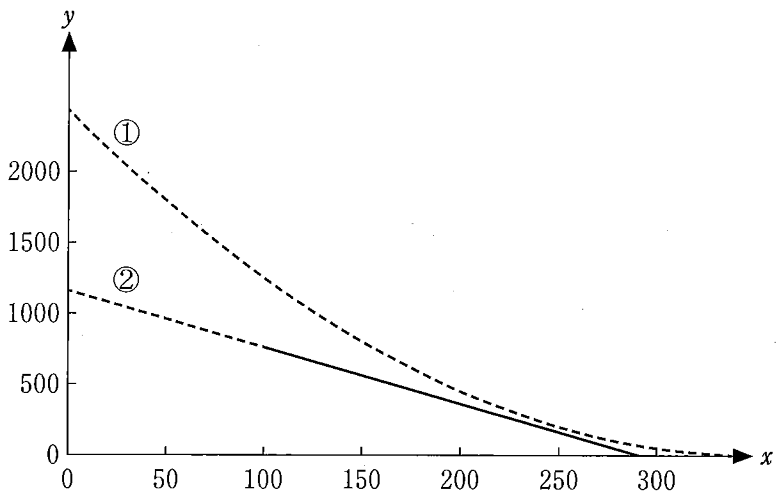

図　2

① の右辺の代わりに ② の右辺を使うと，売り上げ数を少なく見積もることになる。売り上げ数を ② の右辺としたときの利益 z は

$$z = -\boxed{\text{ト}}\,x^2 + \boxed{\text{ナニヌネ}}\,x - 97800$$

で与えられる。z が最大となる x を p とおくと，$p = \boxed{\text{ノハヒ}}$ であり，z の最大値は 39100 である。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

太郎：売り上げ数を少なく見積もった式は，各xについて値が①より小さければよいので，色々な式が考えられるね。

花子：それらの式を①の右辺の代わりに使ったときの利益の最大値と，①の右辺から計算される利益の最大値Mとの関係はどうなるのかな。

1次関数

$$y = -8x + 1968 \qquad \cdots\cdots ③$$

を考える。売り上げ数を③の右辺としたときの利益は$x = 163$のときに最大となり，最大値は50112となる。

また，①〜③のグラフの位置関係は次の図3のようになっている。

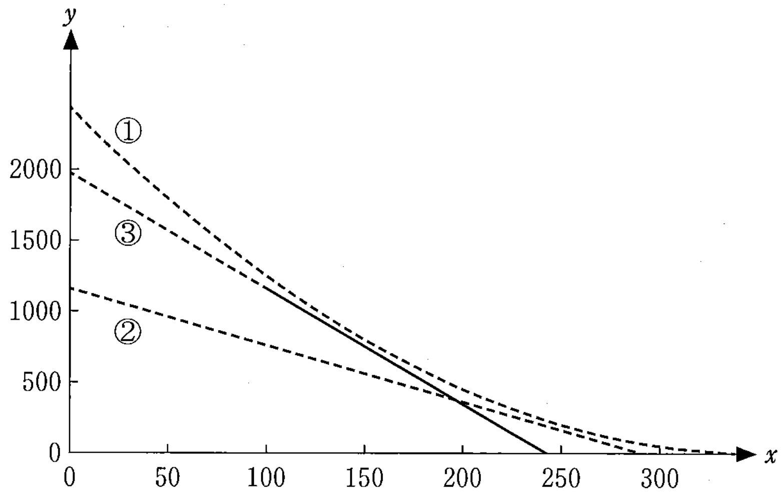

図　3

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の記述として，次の⓪～⑥のうち，正しいものは $\boxed{フ}$ と $\boxed{ヘ}$ である。

$\boxed{フ}$，$\boxed{ヘ}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

⓪ 利益の最大値 M は 39100 である。

① 利益の最大値 M は 50112 である。

② 利益の最大値 M は $\dfrac{39100+50112}{2}$ である。

③ $x=163$ とすれば，利益は少なくとも 50112 以上となる。

④ $x=p$ とすれば，利益は少なくとも 39100 以上となる。

⑤ $x=163$ のときに利益は最大値 M をとる。

⑥ $x=p$ のときに利益は最大値 M をとる。

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

1次関数

$$y = -6x + 1860 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を考える。$100 \leqq x \leqq 300$ において，売り上げ数を④の右辺としたときの利益は $x = 195$ のときに最大となり，最大値は 74350 となる。

また，①～④のグラフの位置関係は次の図4のようになっている。

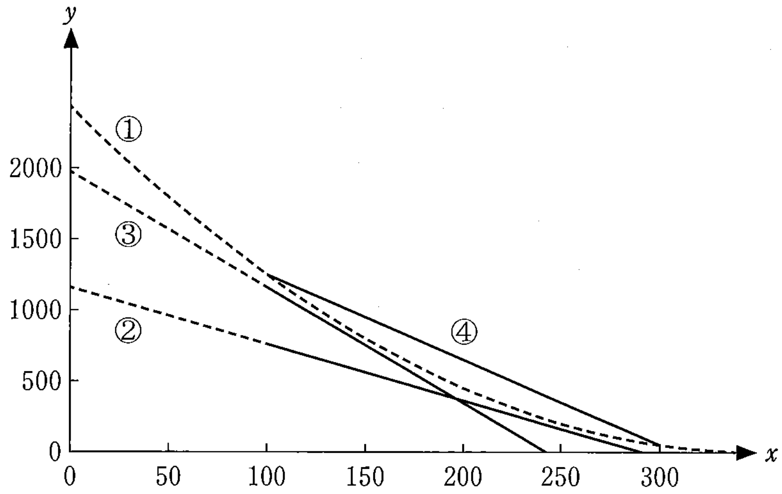

図　4

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の最大値 M についての記述として，次の⓪～④のうち，正しいものは $\boxed{\text{ホ}}$ である。

$\boxed{\text{ホ}}$ の解答群

⓪ 利益の最大値 M は 50112 より小さい。
① 利益の最大値 M は 50112 である。
② 利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい。
③ 利益の最大値 M は 74350 である。
④ 利益の最大値 M は 74350 より大きい。

第4問 (配点 20)

〔1〕 花子さんの通う学校では，生徒会会則の一部を変更することの賛否について生徒全員が投票をすることになった。投票結果に関心がある花子さんは，身近な人たちに尋ねて下調べをしてみようと思い，各回答が賛成ならば1，反対ならば0と表すことにした。このようにして作成される n 人分のデータを x_1，x_2，…，x_n と表す。ただし，賛成と反対以外の回答はないものとする。

例えば，10人について調べた結果が

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

であったならば，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，…，$x_{10} = 1$ となる。この場合，データの値の総和は8であり，平均値は $\dfrac{4}{5}$ である。

(1) データの値の総和 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ は $\boxed{\text{ア}}$ と一致し，平均値 $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ は $\boxed{\text{イ}}$ と一致する。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 賛成の人の数
① 反対の人の数
② 賛成の人の数から反対の人の数を引いた値
③ n 人中における賛成の人の割合
④ n 人中における反対の人の割合
⑤ $\dfrac{\text{賛成の人の数}}{\text{反対の人の数}}$ の値

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(2) 花子さんは，0と1だけからなるデータの平均値と分散について考えてみることにした。

$m = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ とおくと，平均値は $\dfrac{m}{n}$ である。また，分散を s^2 で表す。

(i) s^2 は，0と1の個数に着目すると

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{ \boxed{\text{ウ}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2 + \boxed{\text{エ}} \left(0 - \frac{m}{n}\right)^2 \right\} = \boxed{\text{オ}}$$

と表すことができる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ n	① m	② $(n - m)$	③ $\dfrac{m}{n}$
④ $\left(1 - \dfrac{m}{n}\right)$	⑤ $\dfrac{n}{2}$	⑥ $\dfrac{m}{2}$	⑦ $\dfrac{n - m}{2}$

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{m^2}{n^2}$	① $\left(1 - \dfrac{m}{n}\right)^2$	② $\dfrac{m(n - m)}{n^2}$
③ $\dfrac{m(1 - m)}{n^2}$	④ $\dfrac{m(n - m)}{2n^2}$	⑤ $\dfrac{n^2 - 3mn + 3m^2}{n^2}$
⑥ $\dfrac{n^2 - 2mn + 2m^2}{2n^2}$		

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

(ii) $n = 25$ とする。m の値によって分散 s^2 の値がどのように変わるかを調べる。s^2 が最小となるのは，m の値が $\boxed{\text{カ}}$ のときのみである。また，s^2 が最大となるのは，m の値が $\boxed{\text{キ}}$ のときのみである。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① 12	② 13	③ 14	④ 25
⑤ 0 または 25	⑥ 12 または 13	⑦ 12 または 14		
⑧ 13 または 14	⑨ 12 または 13 または 14			

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

〔2〕 変量x，yの相関係数について考える。

(1) 変量x，yの値の組

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_{25},\ y_{25})$$

をデータZとする。図1はZの散布図であり，Zから図1の点Aの表す値の組を除いた24個の値の組からなるデータをZ'とする。図2はZ'の散布図である。

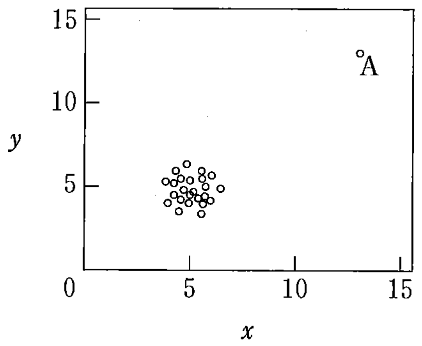

図1　データZの散布図

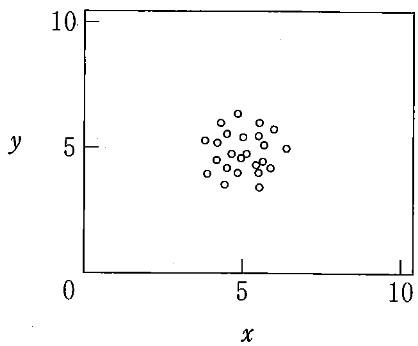

図2　データZ'の散布図

データZのxとyの相関係数を計算すると0.8となる。データZ'のxとyの相関係数はおよそ［ク］である。

［ク］については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ −0.8	① −0.6	② 0.0	③ 0.5	④ 0.7	⑤ 0.9

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

(2) 変量 x, y の値の組

$$(-1,\ -1),\quad (-1,\ 1),\quad (1,\ -1),\quad (1,\ 1)$$

をデータ W とする。データ W の x と y の相関係数は0である。データ W に，新たに1個の値の組を加えたときの相関係数について調べる。なお，必要に応じて，後に示す表1の計算表を用いて考えてもよい。

a を実数とする。データ W に $(5a,\ 5a)$ を加えたデータを W' とする。W' の x の平均値 $\bar{x}$ は $\boxed{\text{ケ}}$，W' の x と y の共分散 s_{xy} は $\boxed{\text{コ}}$ となる。ただし，x と y の共分散とは，x の偏差と y の偏差の積の平均値である。

W' の x と y の標準偏差を，それぞれ s_x, s_y とする。積 $s_x s_y$ は $\boxed{\text{サ}}$ となる。また相関係数が0.95以上となるための必要十分条件は $s_{xy} \geqq 0.95\, s_x s_y$ である。これより，相関係数が0.95以上となるような a の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

表1　計算表

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
-1	-1			
-1	1			
1	-1			
1	1			
$5a$	$5a$			

（数学 I 第4問は次ページに続く。）

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ 0　① $5a$　② $5a + 4$　③ a　④ $a + \frac{4}{5}$

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ $4a^2$　① $4a^2 + \frac{4}{5}$　② $4a^2 + \frac{4}{5}a$　③ $5a^2$　④ $20a^2$

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ $4a^2 + \frac{16}{5}a + \frac{4}{5}$　① $4a^2 + 1$

② $4a^2 + \frac{4}{5}$　③ $2a^2 + \frac{2}{5}$

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $-\frac{\sqrt{95}}{4} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{95}}{4}$　① $a \leqq -\frac{\sqrt{95}}{4}$, $\frac{\sqrt{95}}{4} \leqq a$

② $-\frac{\sqrt{95}}{5} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{95}}{5}$　③ $a \leqq -\frac{\sqrt{95}}{5}$, $\frac{\sqrt{95}}{5} \leqq a$

④ $-\frac{2\sqrt{19}}{5} \leqq a \leqq \frac{2\sqrt{19}}{5}$　⑤ $a \leqq -\frac{2\sqrt{19}}{5}$, $\frac{2\sqrt{19}}{5} \leqq a$